Δευτέρα 18/03/20..

Άσκηση 1 φυλ. 1

Έστω $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad S \times S \to S$

$$a * b = |a| b$$

α) Δείξτε ότι * καλά ορισμένη και προσεταιριστική.
β) Δείξτε ότι υπάρχει $e \in S$ $e * b = b$ για κάθε $b \in S$
Δείξτε ότι για κάθε $a \in S$ υπάρχει $b \in S$ με $a * b = e$
γ) Έχει η S ουδέτερο στοιχείο; Είναι η S ομάδα;

Λύση:

α) Έστω $a, b \in S \Rightarrow a \neq 0 \neq b \Rightarrow |a| \neq 0 \neq b \Rightarrow |a| \cdot b \neq 0 \Rightarrow |a| \cdot b \in \mathbb{R}$
Άρα $|a| \cdot b \in S$ και * καλά ορισμένη

$a * (b * \gamma) = a * (|b| \cdot \gamma) = |a| (|b| \cdot \gamma)$
$(a * b) * \gamma = (|a| \cdot b) * \gamma = (||a| \cdot b|) \cdot \gamma = (|a| \cdot |b|) \cdot \gamma$
$a * (b * \gamma) = (a * b) * \gamma$ αφού είναι πραγματικοί αριθμοί κ' στους πραγματ. ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

β) Για $e = -1$ έχουμε $-1 * b = |-1| \cdot b = 1 \cdot b = b$

Έστω $a \in S \Rightarrow a \neq 0$. τότε για $b = -\frac{1}{|a|}$ $\quad a * b = |a| \cdot b = |a| \frac{-1}{|a|} = -1$

γ) Έχει η S ουδέτερο; Έστω ότι έχει και e το ουδέτερο της S τότε:
$a * e = a = e * a \Rightarrow |a| e = a = |e| \cdot a$
Έστω $a > 0 \Rightarrow a \cdot e = a \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} e = 1$
Έστω $a < 0 \Rightarrow -a \cdot e = a \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} e = -1$
Άτοπο άρα το S δεν έχει ουδέτερο.

→ Συνεπώς δεν είναι ομάδα η S αφού δεν έχει ουδέτερο.

$\boxed{\text{Άσκηση:}}$ Έστω $*$ μια προσεταιριστική πράξη σε ένα σύνολο G. Δείξτε ότι αν (i) υπάρχει στοιχείο $e\in G$ τέτοιο ώστε

$$e*x=x \text{ για κάθε } x\in G \text{ και}$$

(ii) Για κάθε $x\in G$ υπάρχει $x'\in G$ τέτοιο ώστε

$$x'*x=e$$

Τότε $(G,*)$ είναι ομάδα

Έστω $x\in G \Rightarrow$ υπάρχει $x'\in G$ τ.ω: $x'*x=e$ (1)
το $x'\in G \Rightarrow$ υπάρχει $x''\in G$ τ.ω $x''*x'=e$. (2)

$$x*x' = e*(x*x') \overset{(2)}{=} (x''*x')*(x*x') = x''*(x'*x)*x' \overset{(1)}{=} x''*e*x' =$$
$$= x''*(e*x') = x''*x' = e.$$

$\boxed{\text{Άρα για κάθε } x \text{ ισχύει } x*x'=e=x'*x}$

$$x*e = x*(x'*x) = (x*x')*x = e*x = x.$$

$\boxed{\text{Άρα για κάθε } x \text{ ισχύει } x*e=x=e*x}$

Άρα η G είναι ομάδα

$\circledast$ Ίδια άσκηση απλά: (i) Υπάρχει στοιχείο $e\in G$ τ.ω: $x*e=x$, $\forall x\in G$
(ii) $\forall x\in G$, $\exists\, x'\in G$ τ.ω: $x*x'=e$.

$\boxed{\text{Άσκηση 5 φυλ. 1}}$

$(G,*)$ ομάδα, e ουδέτερο, $a,b,\gamma\in G$
Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) $a*b*\gamma=e$
(ii) $b*\gamma*a=e$
(iii) $\gamma*a*b=e$.

$$\begin{array}{ccc} (i) & \searrow & \\ \Uparrow & & (ii) \\ (iii) & \swarrow & \end{array}$$

Λύση:
(i) $\Rightarrow$ (ii) $a*(b*\gamma)=e \Rightarrow a^{-1}*(a*b*\gamma)=a^{-1}*e \Rightarrow$
$\Rightarrow (a^{-1}*a)*(b*\gamma)=a^{-1} \Rightarrow b*\gamma=a^{-1} \Rightarrow (b*\gamma)*a=a*a^{-1}$
$\Rightarrow (b*\gamma)*a=e$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $b*\gamma*a=e \Rightarrow b^{-1}*(b*\gamma*a)=b^{-1}*e \Rightarrow \gamma*a*b=e.$

Άσκηση 6 φυλ.1

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$

$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1a_2 - \beta_1 b_2, a_1\beta_2 + a_2\beta_1)$

(i) $(\mathbb{C}, +)$ αβελιανή ομάδα

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ » »

$(a_1,\beta_1) + (a_2,\beta_2) + (a_3,\beta_3) = \dots = [(a_1,\beta_1) + (a_2\beta_2)] + (a_3,\beta_3)$

$(a,\beta) + (0,0) = (a,b)$

$(a,\beta) + (-a,-\beta) = (0,0) = (-a,-\beta) + (a,\beta)$

Για να είναι αβελιανή: $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$

Για την $(\mathbb{C}^*, \cdot)$:

$(a_1,\beta_1)\cdot[(a_2\beta_2)\cdot(a_3\beta_3)] = (a_1,\beta_1)(a_2a_3 - \beta_2\beta_3, a_2\beta_3 + a_3\beta_2)$

$= [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2), a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]$

$= [a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2, a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3]$

$((a_1,b_1) * (a_2,b_2))(a_3,b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3,b_3) =$

$= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + a_3(a_1b_2 + a_2b_1)) =$

$= (a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_2b_1b_3 - a_1b_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_3a_1b_2 + a_3a_2b_1)$

(1) Άρα ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα ✓

$(a,b)(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$

$(1,0)\cdot(a,b) = (1\cdot a - 0\cdot b, 1\cdot b + 0\cdot a) = (a,b)$

(2) Άρα έχει ουδέτερο στοιχείο ✓

Έστω $(a,b) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow a^2+b^2 \neq 0$

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right) = (1,0)$$

$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)(a,b) = \dots = (1,0).$

(3) Άρα υπάρχει αντίστροφο στοιχείο. ✓

Συνεπώς $\mathbb{C}^*$ ομάδα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$
$(a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1) = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + b_2a_1)$
} Ίσα μεταξύ τους αφού είμαστε στους πραγματικούς

Άρα είναι αβελιανή.

$(a_1,b_1)\cdot\left((a_2,b_2) + (a_3,b_3)\right) = \dots = (a_1,b_1)(a_2,b_2) + (a_1,b_1)(a_3,b_3).$

(β) $i = (0,1) \in \mathbb{C}$ $\quad \tilde{a} = (a,0)$

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = \tilde{a} + (b,0)(0,1) = \tilde{a} + \tilde{b}i$

✓ $(b,0)(0,1) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0,b).$

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -\tilde{1}$

Κλειστότητα πράξης πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Έστω (a,b) και $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Ισχυριζόμαστε ότι $(a,b)\cdot(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Έστω ότι όχι: $(a,b) \neq (0,0) \neq (x,y)$ και $(a,b)(x,y) = (0,0)$.

$(ax - by, ay + bx) = (0,0) \Rightarrow$ $\begin{cases} ax - by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ ομογενές σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

$\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ αφού $(a,b) \neq (0,0)$

Άρα το $\begin{cases} ax - by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ είναι ομογενές σύστημα Cramer

$\Rightarrow$ μοναδική λύση την μηδενική $x = 0, y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ Άτοπο.
Άρα πράγματι $(a,b)(x,y) \neq (0,0)$ δηλ. $(a,b)(x,y) \in \mathbb{C}^*$

Εαν G ομάδα κ' $a \in G$ τότε:

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

είναι κυκλική υποομάδα που παράγεται από το a.

Το a ονομάζεται γεννήτορας της κυκλικής υποομάδας $\langle a \rangle$.

<u>Ορισμός</u>: Μια ομάδα G ονομάζεται κυκλική αν υπάρχει $a \in G$ τέτοιο ώστε $G = \langle a \rangle$.

<u>Παραδείγματα</u>:

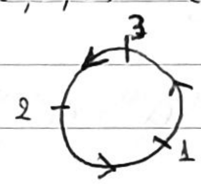
(*) Μπορεί να γραφεί με τόσους τρόπους όσο το μήκος του

S_3 Έστω $a = (1,2,3)$ $\quad \langle a \rangle = \langle (1,2,3) \rangle = \{(1,2,3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$\langle a \rangle = \{I, (1,2,3), (1,3,2)\}$.

$a^2 = (1,2,3)(1,2,3) = (1,3,2)$ $\qquad a^{-1} = (1,2,3)^{-1} = (3,2,1) = (1,3,2)$

$a^3 = a \cdot a^2 = (1,2,3)(1,3,2) = (1)(2)(3) = I$



$a^4 = a^3 \cdot a = I \cdot a = a = (1,2,3)$

$a^5 = a^2 \cdot a^3 = (1,3,2) \cdot I = (1,3,2)$

$a^6 = I$

$\subseteq$ $I = (1,2,3)^0 \in \langle (1,2,3) \rangle$.

$(1,2,3) = (1,2,3)^1 \in \langle (1,2,3) \rangle$ $\qquad$ Άρα $\{I, (1,2,3), (1,3,2)\} \subseteq \langle (1,2,3) \rangle$.

$(1,3,2) = (1,2,3)^2 \in \langle (1,2,3) \rangle$

$a^3 = I$

$(\subseteq)$ Έστω $(1,2,3)^n \in \langle (1,2,3) \rangle$ με $n = 3 \cdot q + r$, $0 \leq r < 3$

(i) $r = 0$, $(1,2,3)^n = (1,2,3)^{3q} = I$

(ii) $r = 1$, $(1,2,3)^n = (1,2,3)^{3q+1} = (1,2,3)^{3q} \cdot (1,2,3) = (1,2,3)$

$r = 2$, $(1,2,3)^n = (1,2,3)^{3q+2} = (1,2,3)^{3q} \cdot (1,2,3)^2 = I (1,2,3)^2 = (1,3,2)$

Άρα $\langle (1,2,3) \rangle \subseteq \{I, (1,2,3), (1,3,2)\}$.

Συνεπώς $\langle (1,2,3) \rangle = \{I, (1,2,3), (1,3,2)\} = \langle (1,3,2) \rangle$.

Η ομάδα S_3 είναι κυκλική;

Η $S_3 = \{I, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

$\langle I \rangle = \{I\}$.
$\langle (1,2,3) \rangle = \{I, (1,2,3), (1,3,2)\} = \langle (1,3,2) \rangle = A_3$
$\langle (1,2) \rangle = \{I, (1,2)\}$.
$\langle (1,3) \rangle = \{I, (1,3)\}$.
$\langle (2,3) \rangle = \{I, (2,3)\}$. Άρα η S_3 δεν είναι κυκλική.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε κυκλική ομάδα είναι Αβελιανή.

Έστω $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Έστω $b, \gamma \in G \Rightarrow b = a^n, \ \gamma = a^m$

$$b \cdot \gamma = a^n \cdot a^m = a^{n+m} \underset{n,m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+m = m+n.}{=} a^{m+n} = a^m \cdot a^n = \gamma \cdot b$$

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$
$\mathbb{Z}_7 = \langle [1]_7 \rangle = \langle [6]_7 \rangle = \langle [2]_7 \rangle = \langle [3]_7 \rangle = \langle [4]_7 \rangle = \langle [5]_7 \rangle$
$\langle [2]_7 \rangle = \{[0]_7, [2]_7, [4]_7, [6]_7, [1]_7, [3]_7, [5]_7\}$.

$\mathbb{Z}^*$ δεν είναι ομάδα διότι κάθε στοιχείο δεν έχει αντίστροφο.
$\mathbb{Q}^*$ δεν είναι κυκλική
$\mathbb{Q}$ δεν είναι κυκλική.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #1

1. Θεωρούμε το σύνολο $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την πράξη $* : S \times S \to S$ στο S ως εξής
$$a * b = |a|b.$$
   (α′) Να δειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη και προσεταιριστική.
   (β′) Να δειχθεί ότι υπάρχει $e \in S$ ώστε $e * b = b$ για κάθε $b \in S$. Επίσης να δειχθεί ότι αν $a \in S$ τότε υπάρχει $b \in S$ με $a * b = e$.
   (γ′) Έχει η S ουδέτερο στοιχείο; Είναι η S ομάδα;

2. Να δειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη
$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

3. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν το σύνολο G είναι πεπερασμένο με άρτιο πλήθος στοιχείων να δειχθεί ότι υπάρχει στοίχείο $a \in G$ με $a \neq e$ τέτοιο ώστε $a * a = e$.

4. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν ισχύει
$$x * x = e$$
για κάθε $x \in G$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

5. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και $a, b, c \in G$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
   (α′) $a * b * c = e$
   (β′) $b * c * a = e$
   (γ′) $c * a * b = e$

6. Έστω $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζουμε δύο πράξεις $+, \cdot$ ως εξής:
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$
   (α′) Δείξτε ότι τα ζεύγη $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες, και ότι η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική επί της πράξης $+$.
   (β′) Θέτουμε $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ και αν $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\widetilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ τότε υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = \widetilde{a} + \widetilde{b} \cdot i$. Επιπλέον δείξτε ότι $i \cdot i = \widetilde{(-1)}$.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες να βρεθούν τουλάχιστον δύο μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες

$$(\mathbb{Z},+), \qquad (\mathbb{Q},+), \qquad (S_3,\circ), \qquad (8\mathbb{Z},+), \qquad (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot).$$

2. Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα $< A >$ της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ η οποία παράγεται από τον πίνακα A, όπου A είναι ένας εκ των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι αν H και K είναι δύο υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας $(G,*)$, τότε το υποσύνολο

$$H*K=\{h*k : h\in H, k\in K\}$$

είναι υποομάδα της G. Επίσης να αποδείξετε με την βοήθεια αντιπαραδείγματος ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει όταν η ομάδα G δεν είναι αβελιανή.

4. (α′) Αν H, K είναι υποομάδες μιας ομάδας G δείξτε ότι η ένωση $H\cup K$ είναι υποομάδα αν και μόνο αν είτε $H\subseteq K$ είτε $K\subseteq H$.

   (β′) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνησίων υποομάδων της.

   (γ′) Δείξτε ότι η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8),\cdot)$ είναι ένωση τριών γνησίων υποομάδων της.

5. (α′) Συμβολίζουμε με T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1, δηλαδή

$$\mathrm{T}=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$$

   Να δειχθεί ότι το T αποτελεί υποομάδα του $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

   (β′) Συμβολίζουμε με U το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με την ιδιότητα να υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $z^n=1$. Δείξτε ότι το U είναι υποομάδα της $(\mathrm{T},\cdot)$.

   (γ′) Έστω m θετικός ακέραιος. Θέτουμε

$$\mathrm{U}_m=\{z\in\mathbb{C} : z^m=1\}.$$

   Η U_m ονομάζεται ομάδα των m-στων ριζών της μονάδος στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η U_m είναι υποομάδα της $(\mathrm{U},\cdot)$.

   (δ′) Δείξτε ότι $U=\cup_{m=1}^{\infty}\mathrm{U}_m$. Επιπλέον, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m η ομάδα U_m είναι κυκλική και ότι η ομάδα U δεν είναι κυκλική.